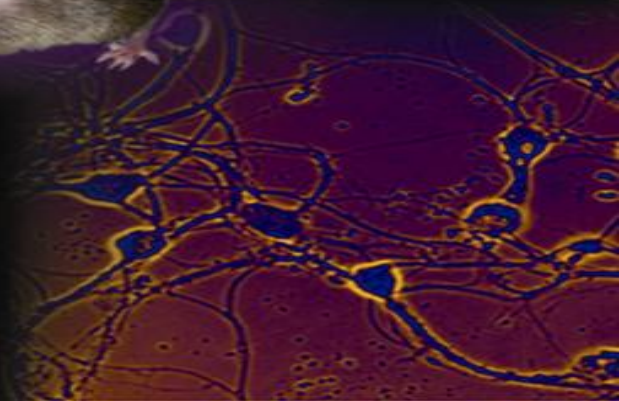
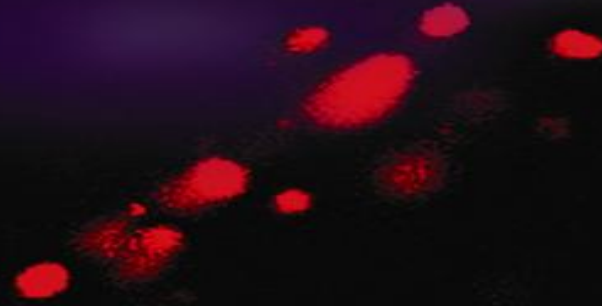
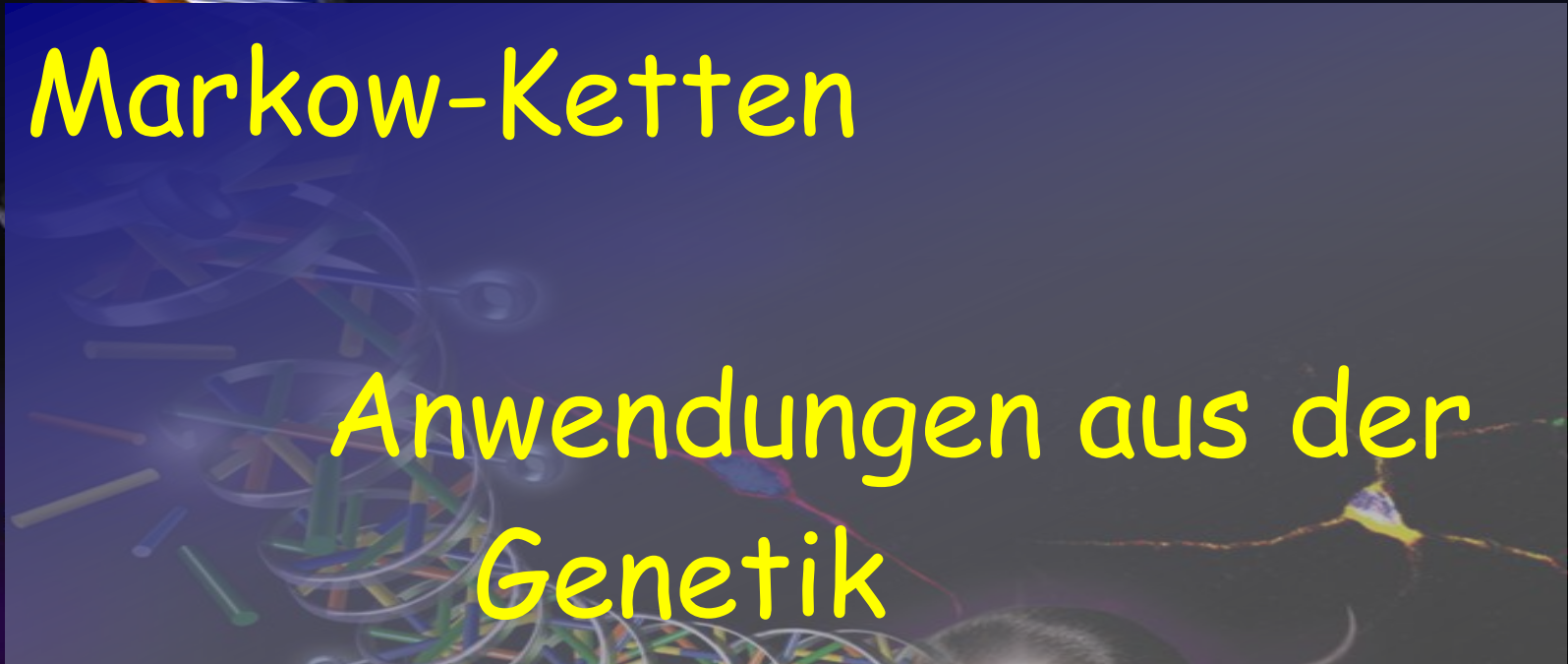


Markow-Ketten

Anwendungen aus der
Genetik

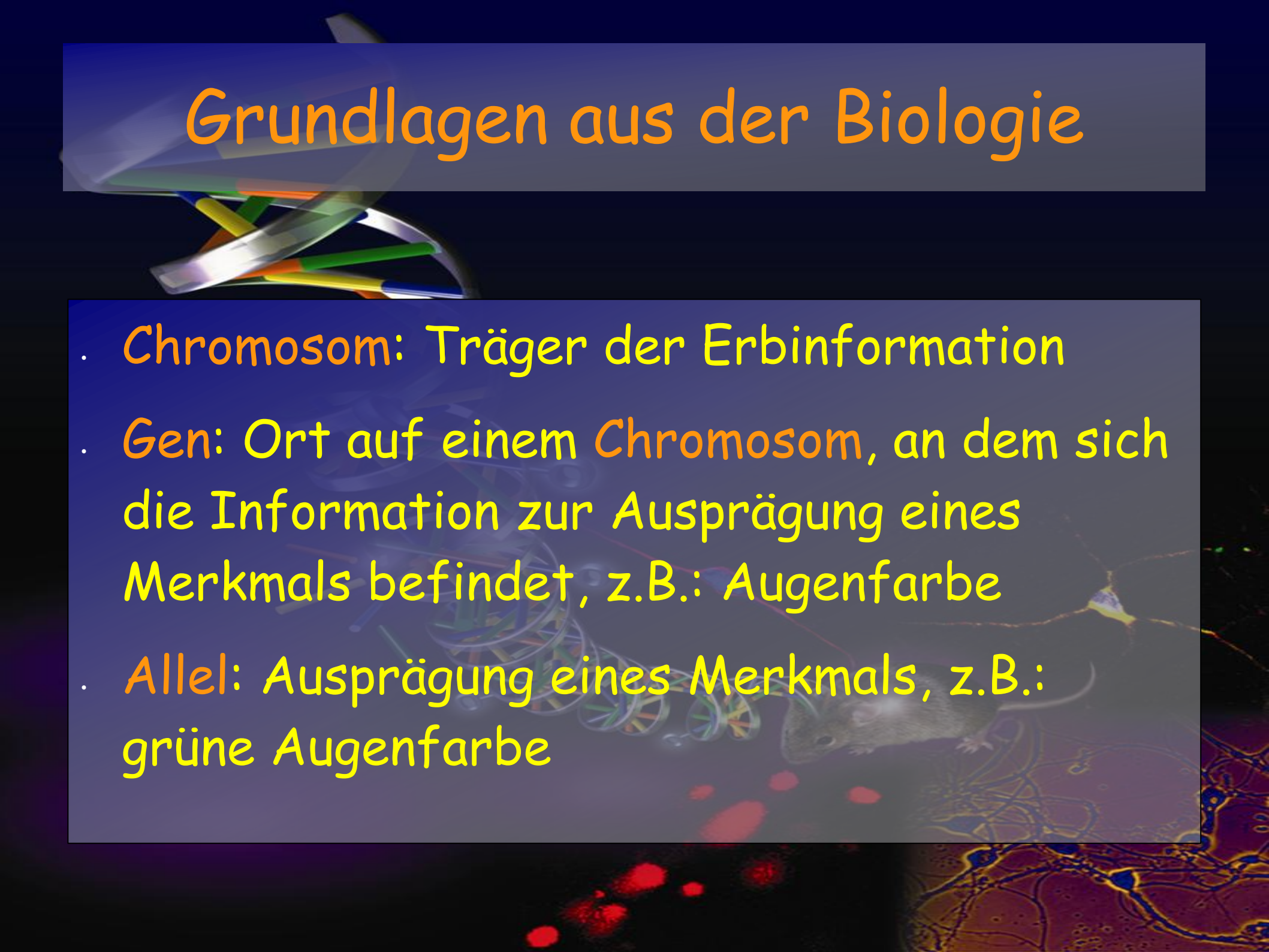


Grundlagen aus der Biologie

- G9: Genetik und Evolution sind Thema in
 - der 10-ten Jahrgangsstufe
 - 12/2 (Genetik) und 13/1 (Evolution)
- G8: Genetik und Evolution sind Thema in
 - Q1: Genetik
 - Q2: Evolution
- nicht alle SuS haben Biologie in der Oberstufe!

Grundlagen aus der Biologie



- **Chromosom:** Träger der Erbinformation
 - **Gen:** Ort auf einem **Chromosom**, an dem sich die Information zur Ausprägung eines Merkmals befindet, z.B.: Augenfarbe
 - **Allel:** Ausprägung eines Merkmals, z.B.: grüne Augenfarbe
- 

Grundlagen aus der Biologie

- Allele werden durch Buchstaben abgekürzt:

A, B, ... ,

a, b, ...

- Jede Zelle enthält einen doppelten Chromosomensatz - also auch 2 Allele (Genotyp) für jedes Merkmal

- Schreibweise für Genotypen:

AA - Allel A ist 2-mal vorhanden

AB - je 1-mal Allel A und B

Grundlagen aus der Biologie

- Keimzellen enthalten nur die Hälfte der Erbinformation (einf. Chromosomensatz)
- enthalten die Zellen die Allele AB dann enthalten die Keimzellen das A oder B
- Kreuzung: aus 2 Keimzellen (Mutter und Vater) entsteht eine neue Zelle (Zygote) - wieder mit 2 Allelen pro Gen (doppelter Chromosomensatz)

Grundlagen aus der Biologie

	Mutter	Vater
Elterngeneration	AB	CD
Keimzellen	A oder B	C oder D
Kindgeneration	AC, AD, BC, BD	

Einfache Kreuzungsmodelle



- Kreuzung von Pflanzen mit gemischtem Genotyp (heterogen): AB
- Anlaufvektor: beliebige Verteilung auf die Zustände AA, AB und BB
- Langzeitverhalten: $(0,25; 0,5 ; 0,25)$

Modelle mit 1 absorbierenden Zustand

- Kreuzung von Pflanzen mit reinem Genotyp (homogen): AA oder BB
- Anlaufvektor: beliebige Verteilung auf die Zustände AA, AB und BB
- Langzeitverhalten: $(1 ; 0 ; 0)$ bzw. $(0 , 0 , 1)$

Markow - Ketten mit 2 absorbierenden Zuständen

- **Einstieg:** informierender Text, der die Paarung von Blutsverwandten und die betrachteten Zustände erklärt
- **Problematisierung:** Wie erhält man die Übergangsmatrix?
- **Arbeitsphase:** SuS berechnen die Übergangsmatrix M
- **Bestimmung des Langzeitverhaltens ohne Lösung eines linearen Gleichungssystems**

Paarung von Blutsverwandten

- wir betrachten 2 Allele **A** und **B** eines Gens
- es gibt 3 verschiedene Genotypen

AA AB BB

- es gibt 6 verschiedene Paarungsmöglichkeiten:

$E_1: AA \times AA$ $E_2: AA \times AB$ $E_3: AA \times BB$

$E_4: AB \times AB$ $E_5: AB \times BB$ $E_6: Bb \times BB$

Problematisierung

Paarung E_1 : AA x AA

Vater

A

Kinder

AA

Mutter

A

Aus einer Paarung vom Typ E_1 entstehen also mit Wahrscheinlichkeit 1 Paarungen vom Typ E_1 .

Berechnung der Übergangsmatrix

Paarung E_2 : $AA \times AB$

Vater

A

Mutter

A


B

Kinder

AA

AB

Berechnung der Übergangsmatrix



Paarung	AAxAA	AAxAB	ABxAB
Zustand	E_1	E_2	E_4
Wahrscheinlichkeit	0,25	0,5	0,25

Aus einer Paarung vom Typ E_2 entstehen also Paarungen vom Typ E_1 , E_2 oder E_4

Berechnung der Übergangsmatrix

Paarung $E_4: AB \times AB$

Vater

A

B

Mutter

A

B

Kinder

AA

AB

BB

Berechnung der Übergangsmatrix

mögliche Kinderpaarungen bei E_4

E_1
0,0625

E_2
0,25

E_3
0,125

E_4
0,25

E_5
0,25

E_6
0,0625

Die Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0,25 & 0 & 0,0625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,125 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 1 & 0,25 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0625 & 0,25 & 1 \end{pmatrix}$$

Entwicklung der Übergangsmatrix

$$M^{16} = \begin{pmatrix} 1 & 0,745 & 0,477 & 0,481 & 0,235 & 0 \\ 0 & 0,009 & 0,013 & 0,011 & 0,009 & 0 \\ 0 & 0,002 & 0,003 & 0,002 & 0,002 & 0 \\ 0 & 0,011 & 0,017 & 0,013 & 0,011 & 0 \\ 0 & 0,009 & 0,013 & 0,011 & 0,009 & 0 \\ 0 & 0,235 & 0,477 & 0,481 & 0,745 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Grenzmatrix

$$M^{\infty} = \begin{pmatrix} 1 & 0,75 & 0,5 & 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,5 & 0,5 & 0,75 & 1 \end{pmatrix}$$

Langzeitverhalten

- es gibt unendlich viele Fixvektoren, die alle von der Form $(a, 0, 0, 0, 0, 1-a)$ sind
- alle möglichen Endzustände bestehen (fast) nur aus den Genotypen AA und BB
- Zusammenhang zwischen Anlaufvektor und Endzustand: Häufigkeit der Allele A und B entscheidet

Das Hardy-Weinberg-Gesetz nicht-homogene Markow-Ketten



- Zustände: AA, AB und BB
- Übergangsmatrix: Einträge sind abhängig von den Wahrscheinlichkeiten $p(AA)$, $p(AB)$ und $p(BB)$
- aber: die Potenzen der Übergangsmatrix sind ab der 2-ten konstant!